

a pour primitive sur $[0, 1]$ la fonction

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On remarquera que f n'est pas continue en 0, mais elle est Riemann-intégrable, car elle est bornée et continue sur $]0, 1]$ (voir Proposition 2.56).

- 4) Un exemple de fonction vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires et qui n'admet pas de primitive, est obtenu en modifiant très légèrement la fonction précédente en posant :

$$g(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0, 1] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

La fonction g ne peut admettre de primitive. Si on suppose que g , admet sur $[0, 1]$ une primitive G , la fonction $G - F$ serait une primitive de $g - f$, ce qui ne peut pas être le cas puisque

$$(g - f)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0, 1] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

ne vérifie pas la propriété des valeurs intermédiaires.

- 5) Une fonction non-intégrable au sens de Riemann peut avoir des primitives : la fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

n'est pas bornée ($\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}\right) = -\infty$), mais elle a une primitive à savoir la fonction

$$F(x) = \begin{cases} F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Ainsi, on peut conclure, que sur un intervalle $[a, b]$, l'ensemble des fonctions qui vérifient la propriétés des valeurs intermédiaires contient strictement celui des fonctions qui admettent des primitives et ce dernier contient strictement celui des fonctions continues ; et qu'il n'y a de comparaison pour l'inclusion, entre l'ensemble de fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$ et celui des fonctions qui admettent des primitives sur $[a, b]$.

2.5 Applications de l'intégrale de Riemann

2.5.1 Le théorème fondamental de l'analyse (ou du calcul intégral)

Le théorème fondamentale dit que la dérivation et le calcul de primitive (primitivation) son inverse l'une de l'autre

2.74 THÉORÈME (LE THÉORÈME FONDAMENTAL)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que sa dérivée f' soit Riemann-intégrable sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

Démonstration: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma_n = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ la subdivision régulière d'ordre n de $[a, b]$. Alors

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)].$$

D'autre part, comme f est dérivable sur $[x_k, x_{k+1}]$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = f'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Alors la somme de Riemann associée à f' , σ_n et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, vérifie

$$S(f, \sigma_n, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} f'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] = f(b) - f(a).$$

Comme f' est Riemann-intégrable, on aura (corollaire 2.68)

$$\int_a^b f'(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, \sigma_n, \xi) = f(b) - f(a). \quad \blacksquare$$

On a

2.76 COROLLAIRE

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable et qui admet sur $[a, b]$ une primitive $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Notation : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable. Si c et d sont dans $[a, b]$, on pose, si $c > d$,

$$\int_c^d f(x) dx = - \int_d^c f(x) dx.$$

Avec cette convention, l'on a, pour tous u, v, w dans $[a, b]$ la relation de Chasles :

$$\int_u^w f(x) dx = \int_u^v f(x) dx + \int_v^w f(x) dx,$$

On déduit du Théorème 2.74 :

2.77 COROLLAIRE

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(x) = 0$, pour tout $x \in [a, b]$. Alors f est une fonction constante.

Démonstration: Pour tout $c \in [a, b]$, on a $0 = \int_a^c f'(x) dx = f(c) - f(a)$, d'où $f(c) = f(a)$ i.e. f est constante. ■

2.79 EXEMPLE.

La fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$ et admet une primitive

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On peut alors calculer son intégrale sur $[0, 1]$ à l'aide de F et on obtient :

$$\int_0^1 f(x) dx = F(1) - F(0) = \sin 1.$$

2.80 **EXEMPLE.** Par contre si une fonction admet une primitive mais n'est pas Riemann-intégrable, Théorème 2.74 ne s'applique pas, par exemple si $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

elle admet une primitive à savoir

$$F(x) = \begin{cases} F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

mais elle n'est pas intégrable sur $[0, 1]$ puisqu'elle n'est pas bornée.

2.81 THÉORÈME

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable. Soit $c \in [a, b]$. Pour tout $x \in [a, b]$, on pose $F(x) = \int_c^x f(t) dt$. Alors,

1) La fonction F est M -Lipschitzienne sur $[a, b]$, où $M = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$.

F est en particulier uniformément continue sur $[a, b]$.

2) Si de plus f est continue en un point $x_0 \in [a, b]$:
 F est alors dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

Démonstration:

1) Soient $x, x' \in [a, b]$,

$$|F(x) - F(x')| = \left| \int_c^x f(t) dt - \int_c^{x'} f(t) dt \right| = \left| \int_{x'}^x f(t) dt \right| \leq M|x - x'|.$$

2) Soit $h \in \mathbb{R}^*$ tels que $x_0 + h \in [a, b]$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) &= \frac{1}{h} \left[\int_c^{x_0+h} f(t) dt - \int_c^{x_0} f(t) dt \right] - f(x_0) \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - f(x_0) \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)] dx. \end{aligned}$$

La fonction f étant continue au point x_0 , on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta_\epsilon > 0 \text{ tel que } \forall t \in [a, b], |t - x_0| \leq \eta_\epsilon \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| \leq \epsilon.$$

Ainsi, si $0 < |h| \leq \eta_\epsilon$, $x_0 + h \in [a, b]$, on obtient :

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \epsilon.$$

■

Maintenant, si de plus f est continue, on a le corollaire suivant :

2.83 COROLLAIRE (EXISTENCE D'UNE PRIMITIVE POUR UNE FONCTION CONTINUE)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout $c \in [a, b]$, la fonction définie, pour tout $x \in [a, b]$, par $F(x) = \int_c^x f(x) dx$ est une primitive de f sur $[a, b]$.

On sait que l'intégrale d'une fonction positive est positive. Mais l'intégrale d'une fonction positive peut être nulle sans que la fonction soit nulle, par exemple si la fonction est nulle sauf en un point. Pour une fonction continue ceci ne peut avoir lieu comme le montre le corollaire suivant.

2.84 COROLLAIRE

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. Si $\int_a^b f(x) dx = 0$, alors f est la fonction identiquement nulle.

Démonstration: Considérons la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. C'est une fonction dérivable, et $F' = f \geq 0$. Donc F est croissante. Mais $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx = 0$. D'où F est la fonction constante, par suite $f = F' = 0$. ■

2.5.2 Conséquences du théorème fondamental

Le théorème fondamental est l'outil de base du calcul intégral; il permet de calculer l'intégrale d'une fonction si on arrive à trouver une primitive. Il n'y a pas en général de procédure systématique pour trouver des primitives. De plus une primitive de fonctions élémentaires (i.e. obtenues par somme, produit, composition, à partir des fonctions puissances, trigonométriques, exponentielles et leur inverse) ne sont pas toujours, le sont même rarement, des fonctions élémentaires.

2.86 EXEMPLE. La fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ est une primitive, d'après le corollaire précédent, de la fonction la fonction "Gaussienne"

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}.$$

La fonction F ne s'exprime pas par des fonctions élémentaires, on peut néanmoins la déterminer en terme de limites de sommes de Riemann.

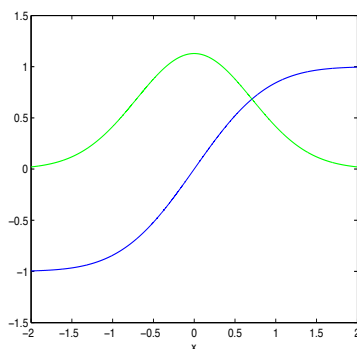


FIGURE 1 – Les graphes de f (en vert) et celui de F (en bleue)

2.87 EXEMPLE. Soit $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\left(\frac{x^{p+1}}{p+1} \right)' = x^p,$$

Il s'en suit que

$$\int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}.$$

On remarque, qu'en utilisant le théorème fondamental, on peut évaluer certaines limites de sommes. Par exemple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^n (2k+1)^p \right] = \frac{1}{p+1},$$

puisque la somme à gauche, est une somme de Riemann associée à $x \mapsto x^p$, la partition régulière d'ordre n de $[0, 1]$ et au vecteur $\xi = (\frac{2k+1}{n})_{1 \leq k \leq n}$.

Deux conséquences importantes du théorème fondamental sont l'intégration par parties et le changement de variable, qui sont les opérations inverses de respectivement, la dérivation d'un produit et de la composée de fonctions.

2.88 THÉORÈME (INTÉGRATION PAR PARTIES)

Soient f et g deux fonctions numériques sur $[a, b]$ dérivables et telles que les dérivées f' et g' soient des fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Démonstration: Par la règle de dérivation d'un produit on a $(fg)' = fg' + f'g$, de plus f, g, f', g' intégrables, il en est de même des produits de fonctions $fg, f'g$ et $f'g$ et l'on obtient par le théorème fondamentale et la linéarité de l'intégrale

$$\int_a^b fg'dx + \int_a^b f'gdx = \int_a^b (fg)'dx = f(b)g(b) - f(a)g(a),$$

ce qu'il fallait montrer.

Proof.

2.90 EXEMPLE.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt.$$

Si $n \geq 1$, une intégration par parties $f(t) = t^n$ and $g'(t) = e^{-t}$ on obtient

$$I_n(x) = -x^n e^{-x} + n \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt = -x^n e^{-x} + n I_{n-1}(x).$$

et, par le théorème fondamental, on a

$$I_0(x) = \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}.$$

On obtient alors par une récurrence sur n , la formule suivante

$$I_n(x) = n! \left(1 - e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right).$$

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k e^{-x} = 0$ on aura

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x) = n!.$$

En fait, ceci montre que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt := \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r t^n e^{-t} dt$ est convergente et qu'elle est égale à $n!$.

Cette formule suggère une extension du "factoriel" au nombres complexes $z \in \mathbb{C}$, appelée fonction Gamma, elle est définie pour tout nombre complexe z de partie réelle $\Re(z) > 0$, par l'intégrale impropre à valeurs complexes

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

En particulier, $\Gamma(n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} I_{n-1}(x) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On va maintenant considérer le changement de variable.

2.91 THÉORÈME (CHANGEMENT DE VARIABLE)

Soient $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que g' soit Riemann-intégrable sur $[c, d]$. Soit $[a, b] = g([c, d])$.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors pour tous $\alpha, \beta \in [c, d]$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du.$$

Démonstration: La fonction f étant continue elle admet une primitive, i.e. une fonction $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F' = f$. La règle de dérivation des fonctions composées appliquée à $F \circ g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ donne

$$(F \circ g)'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Cette dérivée est intégrable sur $[\alpha, \beta]$ puisque $f \circ g$ est continue et g' est intégrable. L'application du théorème fondamental, donne

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)dx &= \int_{\alpha}^{\beta} (F \circ g)'(x)dx \\ &= F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) \\ &= \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} F'(u)du, \\ &= \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du, \end{aligned}$$

ce qui établit le résultat. ■

2.93 EXEMPLE. Pour tout $a > 0$, la fonction dérivable croissante $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^3$ envoie $[-a, a]$ sur $[-a^3, a^3]$. Alors, si $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, la formule de changement de variable, donne

$$\int_{-a}^a f(x^3) \cdot 3x^2 dx = \int_{-a^3}^{a^3} f(u)du.$$

La fonction dérivable $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$ envoie $[-a, a]$ sur $[0, a^2]$. La formule de changement de variable, donne

$$\int_{-a}^a f(x^2) \cdot 2x dx = \int_{a^2}^{a^2} f(u)du = 0.$$

2.94 PROPOSITION

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $a > 0$.

Si f est paire alors :

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

Si f est impaire alors :

$$\int_{-a}^a f(t)dt = 0.$$

Si f est périodique de période $T > 0$ alors :

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

Démonstration: Calculons $\int_{-a}^0 f(x)dx$ en effectuant le changement de variable $g(t) = -t$ qui est une bijection de classe C^1 de $[0, a]$ sur $[-a, 0]$. On a $g'(t) = -1$, donc

$$\int_{-a}^0 f(t)dt = \int_a^0 f(-x)(-1)dx = \int_0^a f(-x)dx.$$

Si f est impaire $f(-x) = -f(x)$, donc

$$\int_{-a}^0 f(t)dt = - \int_0^a f(x)dx.$$

Alors

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = 0.$$

Si f est paire $f(-x) = f(x)$, donc

$$\int_{-a}^0 f(t)dt = \int_0^a f(x)dx.$$

Alors

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx.$$

On a par la relation de Chasles

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx.$$

Calculons $\int_T^{a+T} f(x)dx$ en effectuant le changement de variable $g(t) = t + T$ qui est une bijection de classe C^1 de $[0, a]$ sur $[T, a + T]$. On a $g'(t) = 1$, donc

$$\int_T^{a+T} f(t)dt = \int_0^a f(x + T)dx.$$

Comme f est T -périodique, $f(x + T) = f(x)$, donc

$$\int_T^{a+T} f(t)dt = \int_0^a f(x)dx,$$

alors

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^T f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

■

2.5.3 Conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les fonctions continues :

On a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir la Proposition 2.63) si et seulement si f et g sont colinéaires. En effet, si l'on reprend la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on remarque que, si $I(f^2) \neq 0$, l'égalité

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| = \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

signifie (voir la démonstration la Proposition 2.63) que le trinôme $P(\lambda) = I((\lambda f + g)^2)$ possède un discriminant nul, donc une racine double λ_0 . Alors

$$I((\lambda_0 f + g)^2) = 0,$$

et comme la fonction $(\lambda_0 f + g)^2$ est continue et positive, on en déduit qu'elle est nulle donc que $g = -\lambda_0 f$, ce qui montre que f et g sont colinéaires.

Si $I(f^2) = 0$, alors f^2 est nulle donc f aussi : là encore f et g sont colinéaires.

Si les fonctions f et g sont colinéaires, et si f n'est pas la fonction nulle, il existe λ_0 tel que $\lambda_0 f + g = 0$. Dans ce cas $I((\lambda_0 f + g)^2) = 0$. La trinôme est toujours positif mais s'annule, ce qui signifie que son discriminant est nul. On a alors égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ■

On va maintenant déduire de l'inégalité précédente l'inégalité de Minkowski :

2.96 PROPOSITION (L'INÉGALITÉ DE MINKOWSKI)

Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur le segment $[a, b]$ et à valeurs réelles.

On a :

$$\left(\int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b g(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (**)$$

De plus, si les fonctions f et g sont continues, il y a égalité dans (**) si et seulement si f et g sont positivement colinéaires i.e. il existe $\lambda \geq 0$ tel que $g = \lambda f$ ou $f = \lambda g$.

Démonstration: Les fonctions f^2 , g^2 et $(f + g)^2$ sont des carrés de fonctions Riemann-intégrables, elles le sont donc aussi. On a

$$I((f + g)^2) = I(f^2) + 2I(fg) + I(g^2).$$

et l'inégalité de Schwarz

$$I(fg) \leq I(f^2)^{\frac{1}{2}} I(g^2)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$I((f + g)^2) \leq I(f^2) + 2I(f^2)^{1/2} I(g^2)^{1/2} + I(g^2) = (I(f^2)^{1/2} + I(g^2)^{1/2})^2$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

Maintenant, supposons que f et g sont continues. Si l'on reprend la démonstration précédente, on remarque que, s'il y a égalité dans (**) alors il y a aussi égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc il existe un réel λ tel que $g = \lambda f$. Alors

$$|1 + \lambda| I((f)^2) = I((f + \lambda f)^2) = (I(f^2)^{\frac{1}{2}} + I((\lambda f)^2)^{\frac{1}{2}})^2 = (1 + |\lambda|) I((f)^2).$$

Si $I(f^2) \neq 0$, alors $|1 + \lambda| = 1 + |\lambda|$, d'où $\lambda \geq 0$, ainsi f et g sont positivement colinéaires. Si $I(f^2) = 0$, alors f^2 est nulle donc f aussi : là encore f et g sont positivement colinéaires. ■